



رابطه چسبندگی پوشش و بعد فرکتالی سطح

سجاد قدرتی^۱، سید محسن محسنی^۲، سعیده گرجی کندی^{۳*}

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی پلیمر و رنگ، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران، صندوق پستی: ۴۴۱۳-۱۵۸۷۵

۲- استاد، دانشکده مهندسی پلیمر و رنگ، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران، صندوق پستی: ۴۴۱۳-۱۵۸۷۵

۳- استادیار، دانشکده مهندسی پلیمر و رنگ، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران، صندوق پستی: ۴۴۱۳-۱۵۸۷۵

تاریخ دریافت: ۹۳/۸/۲۶ تاریخ بازبینی نهایی: ۹۳/۱۲/۴ تاریخ پذیرش: ۹۴/۲/۶ در دسترس بصورت الکترونیک: ۹۴/۲/۶

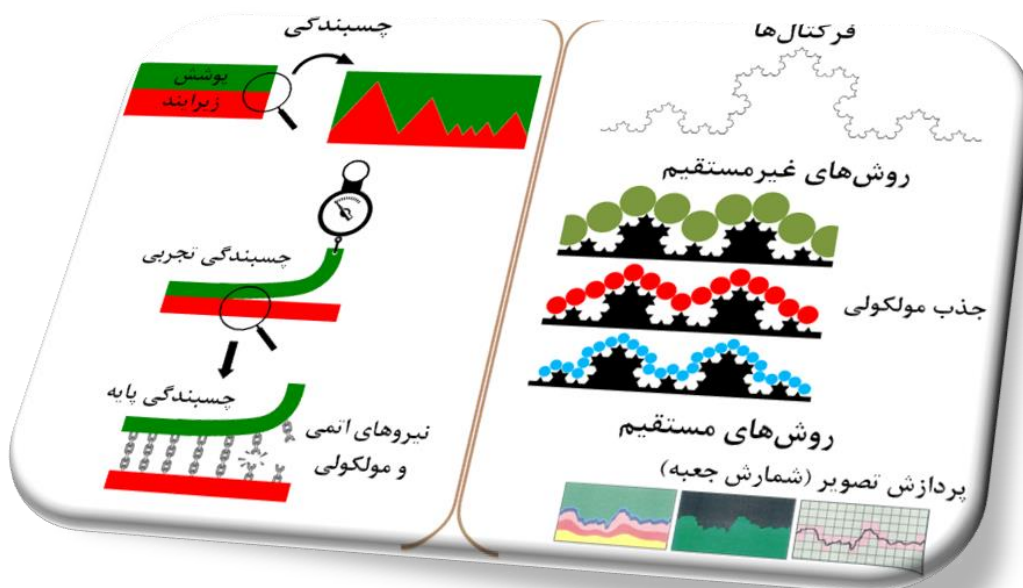
چکیده

بررسی عوامل موثر بر چسبندگی دو سطح به هم دارای اهمیت ویژه به خصوص در علم پوشش سطوح است. به طور کلی عامل نگهداشتن دو سطح در کنار هم که باعث چسبندگی آنها می شود نیروهای اتمی و مولکولی در ناحیه سطحی می باشد. از آنجایی که در تمام سطوحی که به طور تجربی با آنها برخورد می شود میزانی از ناهمواری وجود دارد، مساحت ظاهری (هندسی) آنها با مساحت واقعی (جایی که نیروهای سطحی در آنجا عمل می کنند) آنها متفاوت است و میزان ناهمواری و پیچیدگی آن تعیین کننده اختلاف این دو مقدار می باشد. تعیین مقدار مساحت واقعی یک سطح ناهموار با طرح های پیچیده، فرآیندی بسیار مشکل است که با بهره گیری از هندسه فرکتالی و مفهوم بعد فرکتال تا حد قابل توجهی ممکن شده است. از این روی در این مقاله پس از معرفی کوتاه توابع ترمودینامیکی سطح و تاثیر ناهمواری سطح بر آنها به معرفی فرکتال ها و بعد فرکتال پرداخته شده است و رابطه ضریب ناهمواری سطح در سطوح فرکتالی بررسی شده است. در نهایت روش های مستقیم و غیرمستقیم موجود برای اندازه گیری بعد فرکتال سطوح از منابع مختلف مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه های کلیدی

ناهمواری سطح، بعد فرکتال، روش شمارش جعبه، چسبندگی پوشش سطوح.

چکیده تصویری





Relationship of coating adhesion and surface fractal dimension

Sajjad Ghodrati, S. Mohsen Mohseni, Saeideh Gorji Kandi*

Department of Polymer Engineering and Color Technology, Amirkabir University of Technology, P. O. Box: 15875-4413, Tehran, Iran.

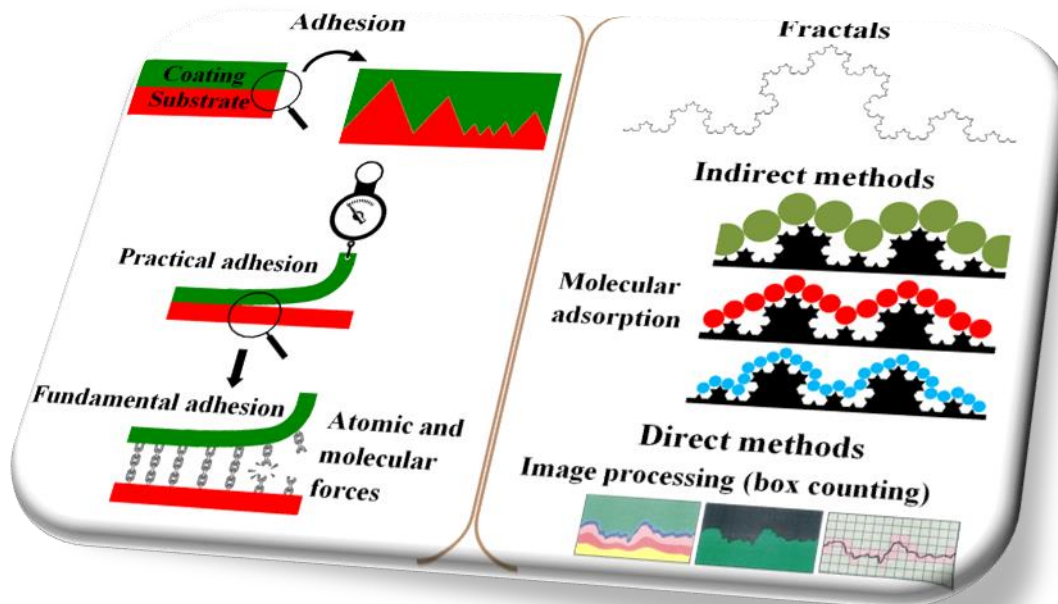
Abstract

Investigating the parameters that influence the adhesion of two surfaces has constantly been of immense importance, especially in surface coating science. Generally, the factor that keeps two surfaces close together and causes adhesion is atomic and molecular forces in the surface region. However, all of the surfaces in the real world are somehow rough (are not smooth). In such surfaces, apparent (geometric) surface area is different from the actual surface area (the place where surface forces act) and the magnitude as well as the complexity of the roughness determine the amount of the difference between two surface areas. Determination of the actual surface area of a surface with complex roughness patterns is a very complicated task, which can be performed by means of fractal geometry and the concept of fractal dimension. In the present study, at first surface thermodynamic functions and their functionality of surface roughness were considered. Then, fractals and fractal dimension have been introduced and the relation between surface roughness and fractal dimension in fractal surfaces has been investigated. Finally, direct and indirect methods of fractal dimension calculation have been reviewed from the literature.

Keywords

Surface roughness, Fractal dimension, Box counting method, Surface coatings adhesion

Graphical abstract



۱- مقدمه

متناظر با تشکیل نیروهای چسبندگی بین سطح و چسب دانست. میزان تمایل سطح در ایجاد تماس و تشکیل نیروهای چسبندگی را با عامل ضریب پخش (S) نشان می‌دهند (رابطه ۲) که از موازنه انرژی‌های سطحی در حالت قبل و بعد از ایجاد سطح تماس بین چسب و سطح و به ازای واحد سطح به دست می‌آید [۴].

$$S = \gamma_{sv} - \gamma_{sl} - \gamma_{lv} \quad (2)$$

از طرفی رابطه بین انرژی سطحی جامد و مایعی که در تماس با آن است، توسط رابطه یانگ به صورت رابطه ۳ است که از تلفیق آن با رابطه ۲ رابطه ۴ حاصل می‌شود [۴]:

$$\gamma_{sv} = \gamma_{sl} + \gamma_{lv} \cos \theta \quad (3)$$

$$S = \gamma_{lv} (\cos \theta - 1) \quad (4)$$

انرژی سطحی را همچنین در حالت بسیار ساده که اتلاف‌های انرژی در زمان جدایش دو سطح نادیده گرفته می‌شود- می‌توان متناظر با انرژی مورد نیاز برای جدایش دو سطح از هم دانست. این انرژی را کار چسبندگی می‌نامند. کار چسبندگی به ازای واحد سطح (W_A) به صورت رابطه ۵ به دست می‌آید.

$$W_A = \gamma_{sv} + \gamma_{lv} - \gamma_{sl} + \gamma_{lv}^{(1+\cos\theta)} \quad (5)$$

توجه شود که در عمل، انرژی لازم برای جدا کردن دو سطح بسیار بیشتر از کار چسبندگی است زیرا در حین جدایش دو سطح اتلاف‌های انرژی مختلفی وجود دارد [۷-۵]. مشاهده می‌شود که تمام رابطه‌های ذکر شده به ازای واحد سطح بیان شده‌اند. در مواردی که سطح مشترک کاملاً مسطح است، واحد سطح ظاهری و واحد سطح واقعی هر دو با هم برابر خواهند بود. اما در مواردی که سطح مشترک یک سطح ناهموار است، سطح ظاهری با سطح واقعی متفاوت خواهد بود. زمانی که ناهمواری سطح مقدار قابل توجهی نیست و سطوحی با ناهمواری‌های ساده مدنظر است، ضریب ناهمواری (r) را می‌توان با رابطه ونزل^۳ (رابطه ۶) بیان کرد [۸]:

$$r = \frac{A}{A_0} \quad (6)$$

A: سطح واقعی

واژه چسبندگی^۱ در بردارنده دو مفهوم متفاوت به شرح زیر می‌باشد: چسبندگی نظری (پایه) به نیروهای اتمی و مولکولی که عامل نگهداشتن دو سطح (یا به طور دقیق تر دو فاز) در تماس با هم است گفته می‌شود و چسبندگی تجربی (اندازه‌گیری شده) عددی است که از آزمون‌های چسبندگی حاصل می‌شود، زمانی که یک سطح را از سطح دیگر جدا می‌کنیم [۱، ۲]. در گذشته باور بر این بود که عدد حاصل از چسبندگی تجربی، برابر با نیروهای اتمی و مولکولی سطح مشترک دو فاز چسبیده (چسبندگی پایه) است. اما بعداً مشخص شد که عدد گزارش شده برای چسبندگی تجربی وابسته به شرایط آزمون مانند نرخ^۲ انجام آزمون است، در صورتی که نیروهای اتمی و مولکولی که باعث نگهداری دو سطح در کنار هم می‌شوند همواره مقداری ثابت است. بنابراین نتیجه گرفته شد که عددی که توسط آزمون چسبندگی گزارش می‌شود به دو عامل بستگی دارد: الف) چسبندگی نظری ب) شرایط آزمون. به عبارت دقیق‌تر عددی که توسط آزمون چسبندگی گزارش می‌شود به چسبندگی نظری در شرایط آزمون بستگی دارد [۳]. بنابراین ضروری است که نیروهای ذکر شده بین دو سطح مورد بحث قرار گیرند، همچنین عامل ناهمواری سطح که محدوده عملکرد نیروهای سطحی را تعیین می‌کند از موارد مهم این حوزه خواهد بود. نحوه محاسبه و اندازه‌گیری ناهمواری سطح در سطوح با پیچیدگی بالا و ارتباط آن با بعد فرکتالی سطح، موردی هستند که به آنها پرداخته خواهد شد.

۲- تعاریف

یکی از موارد پایه‌ای در مطالعه چسبندگی (یا جدایش) دو سطح انرژی آزاد سطح به عنوان یک عامل ترمودینامیکی می‌باشد. بدین منظور ابتدا این عامل در سطوح هموار ایده‌آل بررسی می‌شود و سپس به سطوح ناهموار تعمیم داده می‌شود. انرژی آزاد گیبس سطح به ازای واحد سطح به صورت رابطه ۱ تعریف می‌شود:

$$G^s = \left(\frac{G-G^b}{A} \right) \quad (1)$$

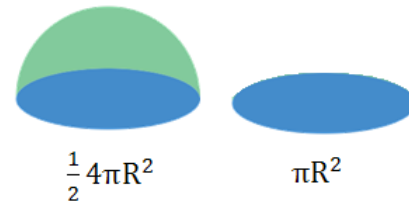
A: مساحت سطح تماس دو سطح
G: انرژی آزاد گیبس کل سیستم
G^b: انرژی آزاد گیبس کل سیستم در صورتیکه تمام اجزای موجود در سیستم دارای شرایط اجزای موجود در توده باشند.
ایجاد این انرژی آزاد سطحی به این علت است که محیط مولکول‌های سطحی با محیط مولکول‌های موجود در توده متفاوت است. بنابراین سطح انرژی مولکول‌های موجود در سطح با سطح انرژی مولکول‌های موجود در توده متفاوت خواهد بود. از طرفی می‌توان انرژی سطحی را

³ Wenzel

¹ Adhesion
² Rate

A0: سطح ظاهری

مثلاً در سطحی با ناهمواری‌های نیم‌کره مانند $r=2$ خواهد بود (شکل ۱).



شکل ۱- بررسی رابطه ونزل برای سطحی با ناهمواری‌های نیم‌کره مانند.

بنابراین برای این سطوح می‌توان با محاسبه یا اندازه‌گیری ضریب ناهمواری، ضریب پخش و کار چسبندگی را طبق رابطه‌های ۷ و ۸ محاسبه نمود [۹، ۵]:

$$S' = r(\gamma_{sv} - \gamma_{sl}) - \gamma_{lv} \quad (7)$$

$$W_A = r(\gamma_{sv} - \gamma_{sl}) + \gamma_{lv} \quad (8)$$

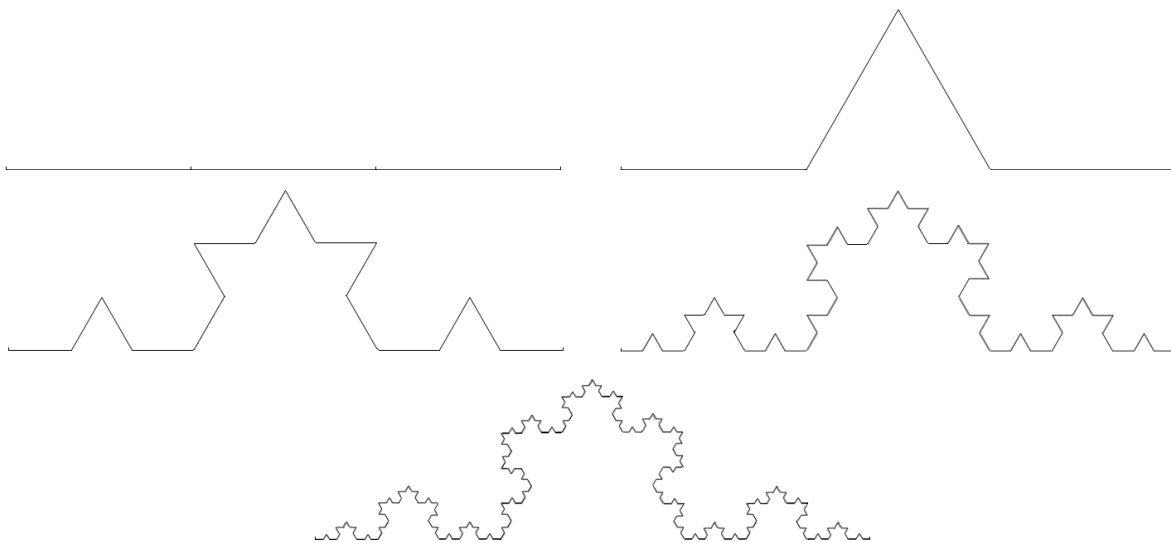
۱-۳- سطوح فرکتالی و بعد فرکتال

نسبت دادن یک مقدار مشخص به سطح واقعی برخی از اجسام به نظر غیر ممکن می‌رسد. این نظریه در اندازه‌گیری سطح ویژه برخی جامدات با استفاده از جذب مولکول بر روی سطح آنها به وضوح دیده شده است. مشاهده می‌شود که هر چه اندازه مولکول جذب شونده کوچکتر می‌شود به علت امکان نفوذ به منافذ کوچک‌تر، سطح اندازه‌گیری شده مقدار

بیشتری خواهد بود. به این سطوح، سطوح فرکتالی گفته می‌شود. مساحت یک سطح فرکتالی وابسته به مقیاس اندازه‌گیری است و اگر این مقیاس اندازه‌گیری کوچک شده و به سمت صفر میل نماید مساحت اندازه‌گیری شده برای سطح فرکتالی به سمت بی‌نهایت میل خواهد کرد [۹، ۵]. در تحقیقات گسترده بر روی سطوح مورد استفاده در علوم مهندسی نشان داده شده است که بسیاری از سطوح دارای خاصیت فرکتالی هستند [۱۱، ۱۰]. بنابراین لازم است که شرحی در ارتباط با فرکتال‌ها و سطوح فرکتالی ارائه شود. در هندسه اقلیدسی به طور نظری خطوط، یک بعدی، سطوح دوبعدی و اجسام سه‌بعدی در نظر گرفته می‌شوند. اما این مفاهیم، مفاهیمی ذهنی هستند که در دنیا واقعی وجود خارجی ندارند، به عنوان مثال هیچ خطی نمی‌توان رسم کرد که تنها دارای طول باشد و فاقد ضخامت باشد. در دنیای واقع اغلب (اگر نه همواره) با هندسه فرکتالی سر و کار داریم. در هندسه فرکتالی یک خط دارای بعدی بیش از یک و یک سطح دارای بعدی بیش از دو خواهد بود [۱۳، ۱۲]. یک مثال ساده برای یک شکل فراکتالی (منحنی فرکتالی) منحنی کخ^۱ است که با استفاده از آن سه ویژگی اساسی اشکال فرکتالی را می‌توان دریافت. منحنی کخ مطابق شکل ۲ (برای چهار مرحله تکرار) از تقسیم اضلاع به مثلث‌های متساوی‌الاضلاع در هر مرحله به‌دست می‌آید.

در یک شکل فرکتالی ایده‌آل مراحل تقسیم‌های فوق بی‌نهایت است بنابراین:

^۱ Koch curve

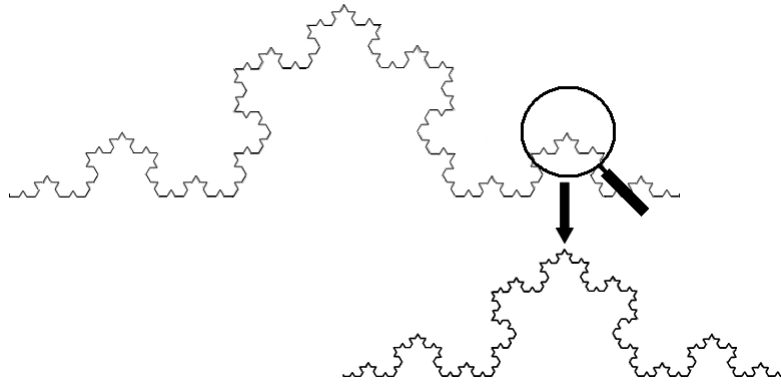


شکل ۲- ساختار منحنی کخ و مراحل رسم آن [۱۴].

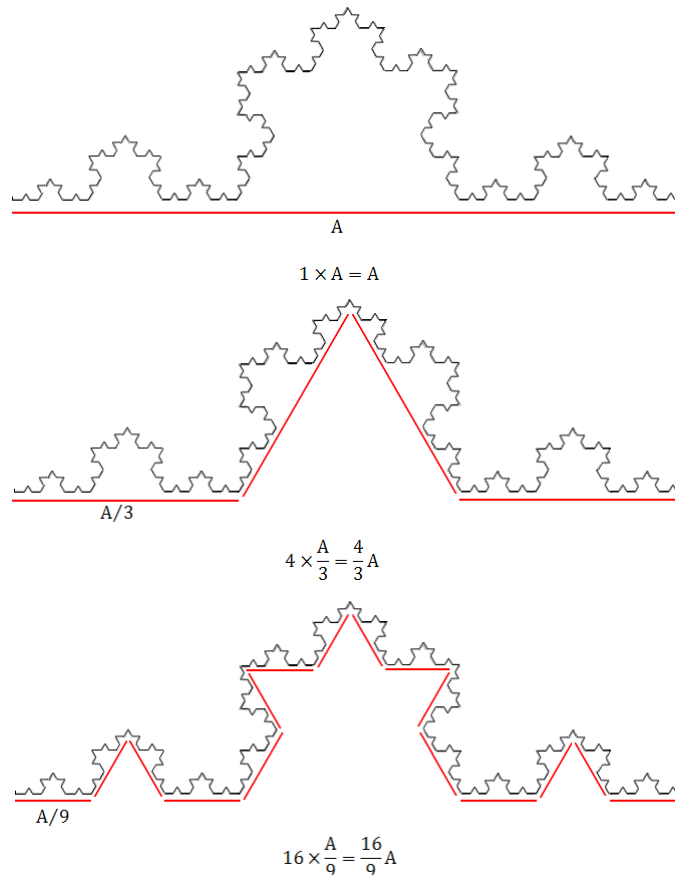
۱- طول خط حاصل از این شکل بی‌نهایت خواهد شد.
 ۲- هر قسمت از شکل مشابه کل شکل خواهد بود که به این خاصیت اشکال فرکتالی، خود متشابهی^۱ گفته می‌شود (شکل ۳). در اجسام وابسته به مقیاس اندازه‌گیری است (شکل ۴)، هر چه این مقیاس کوچکتر شود طول خط عددی بزرگتر به دست خواهد آمد [۱۴].

۱- طول خط حاصل از این شکل بی‌نهایت خواهد شد.
 ۲- هر قسمت از شکل مشابه کل شکل خواهد بود که به این خاصیت اشکال فرکتالی، خود متشابهی^۱ گفته می‌شود (شکل ۳). در اجسام

Self similarity^۱



شکل ۳- رفتار خود متشابهی منحنی کخ، شکل فرکتالی ایده‌آل [۱۴].



شکل ۴- وابستگی طول منحنی کخ به مقیاس اندازه‌گیری.

$$a = \frac{1}{s^D} \rightarrow D = \frac{\log a}{\log \frac{1}{s}} \quad (9)$$

D: بعد اقلیدسی شکل هندسی

از همین تعریف می‌توان برای بدست آوردن بعد فرکتال در اشکال فرکتالی استفاده نمود [۱۶، ۱۵]. منحنی کخ را در نظر بگیرید (شکل ۲)، مقدار بعد فرکتال آن برابر خواهد بود با:

$$S = \frac{1}{3}, a = 4 \rightarrow D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2619$$

اما همانطور که ذکر شد در اجسام فرکتالی موجود در طبیعت این خود مشابهی به صورت آماری (تقریبی) رخ می‌دهد و به این سادگی نمی‌توان بعد فرکتال آنها را محاسبه نمود. یک منحنی فرکتالی غیرایده‌ال مانند مرز کشور ایران را در نظر بگیرید (شکل ۶).



شکل ۶- مرز کشور ایران، یک منحنی فرکتالی غیر ایده‌ال.

برای اندازه‌گیری بعد فرکتال این منحنی فرکتال واقعی از اندازه‌گیری طول آن با یک سری پاره خط‌های با طول متفاوت استفاده می‌شود (شکل ۷).

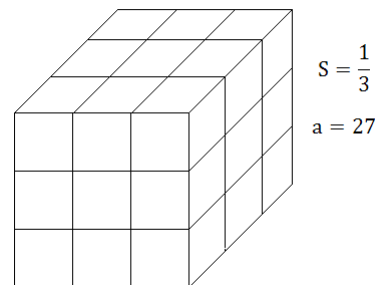
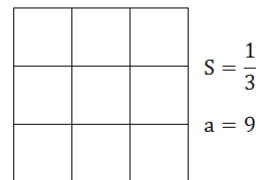


شکل ۷- پوشش دادن طول یک منحنی فرکتالی غیر ایده‌ال با پاره خط‌های با طول متفاوت برای اندازه‌گیری بعد فرکتال آن.

یکی از مهم‌ترین مشخصه‌های یک شکل فرکتالی بعد فرکتال آن است. بعد فرکتال یک شکل خود متشابه معیاری از پیچیدگی آن می‌باشد که با یک مثال در شکل ۵ نشان داده شده است. در این شکل یک ضریب تقسیم‌کننده (S) برابر ۱/۳ را برای خط زیر در نظر بگیرید. با استفاده از این ضریب، خط به سه قسمت مساوی تقسیم می‌شود، به تعداد خطوط مشابه حاصل، تشابه (a) گفته می‌شود. حال اگر ضریب تقسیم‌کننده بر اضلاع یک مربع اعمال شود، تعداد مربعات مشابه حاصل برابر ۹ خواهد بود. به همین ترتیب با اعمال ضریب تقسیم‌کننده بر اضلاع یک مکعب، تعداد ۲۷ مکعب مشابه به دست خواهد آمد.

$$S = \frac{1}{3}$$

$$a = 3$$

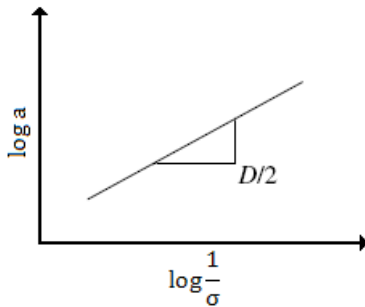


شکل ۵- اعمال ضریب تقسیم‌کننده (S) بر خط، مربع و مکعب.

بنابراین رابطه S و a را به صورت رابطه ۹ می‌توان تعریف نمود:

سپس نمودار لگاریتمی تعداد موزائیک‌ها (a) برحسب معکوس سطح موزائیک ($\frac{1}{\sigma}$) رسم می‌شود. بر اساس رابطه ۱۱، شیب خط حاصل برابر با نصف بعد فرکتال خواهد بود (شکل ۱۱)، زیرا:

$$\frac{\log a}{\log \frac{1}{\sigma}} \sim \frac{\log a}{\log s \frac{1}{2}} \sim \frac{1}{2} \frac{\log a}{\log \frac{1}{s}} = \frac{D}{2} \quad (11)$$



شکل ۱۱- بعد فرکتال به صورت دو برابر شیب بهترین خط برازش شده بین \log و a [۱۷] $\log 1/\sigma$

حال اگر بخواهیم ضریب ناهمواری را برای یک سطح فرکتالی محاسبه کنیم باید نسبت A/A_0 به دست آورده شود. در یک سطح فرکتال مطابق رابطه ۱۲ و ۱۳ داریم:

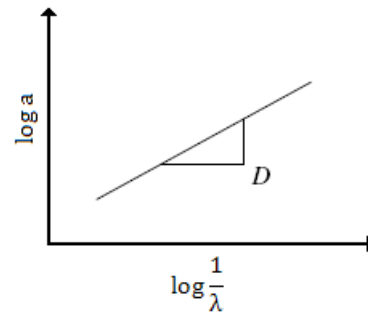
$$A = (as^2)^k A_0, \sigma = (s^2)^k A_0 \quad (12)$$

k: مرحله تقسیم سطح اولیه با استفاده از ضریب تقسیم کننده

$$\rightarrow \log \frac{A}{A_0} = k(\log a + 2\log s), \log \frac{\sigma}{A_0} = 2k\log s \rightarrow \frac{\log \frac{A}{A_0}}{\log \frac{\sigma}{A_0}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\log a}{\log s} \right) + 1$$

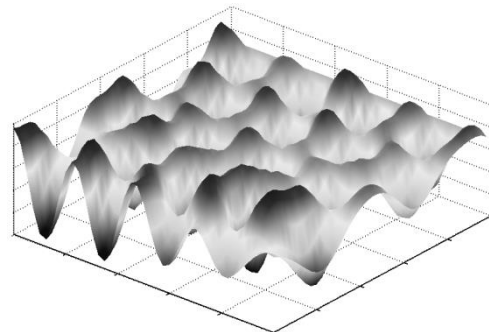
$$\rightarrow \frac{\log \frac{A}{A_0}}{\log \frac{\sigma}{A_0}} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\log a}{\log \frac{1}{s}} \right) + 1 \rightarrow \log \frac{A}{A_0} = \left(-\frac{D}{2} + 1 \right) \log \frac{\sigma}{A_0} \rightarrow r = \frac{A}{A_0} = \left(\frac{\sigma}{A_0} \right)^{(1-\frac{D}{2})} \quad (13)$$

سپس نمودار لگاریتمی تعداد پاره خطها (a) برحسب معکوس طول پاره خط ($\frac{1}{\lambda}$) رسم می‌شود. شیب خط حاصل برابر با بعد فرکتال (D) منحنی مدنظر خواهد بود (شکل ۸).



شکل ۸- بعد فرکتال به صورت شیب بهترین خط برازش شده بین $\log a$ و $\log 1/\lambda$ [۱۷]

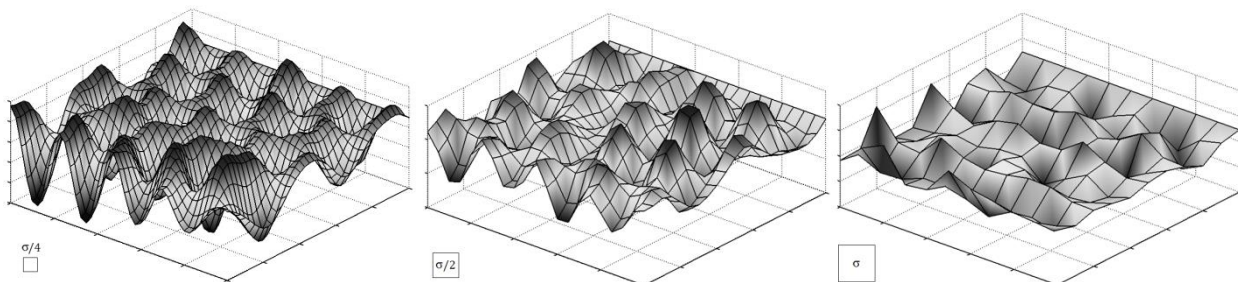
یک سطح فرکتالی غیرایده‌ال را در نظر بگیرید (شکل ۹). مشابه روش ذکر شده برای منحنی فرکتال، برای محاسبه بعد فرکتال یک سطح فرکتال واقعی از اندازه‌گیری سطح با استفاده از یک سری موزائیک (یا هر سطح هندسی دیگر) با مساحت‌های متفاوت استفاده می‌شود (شکل ۱۰).



شکل ۹- سطح فرکتالی غیر ایده‌ال.

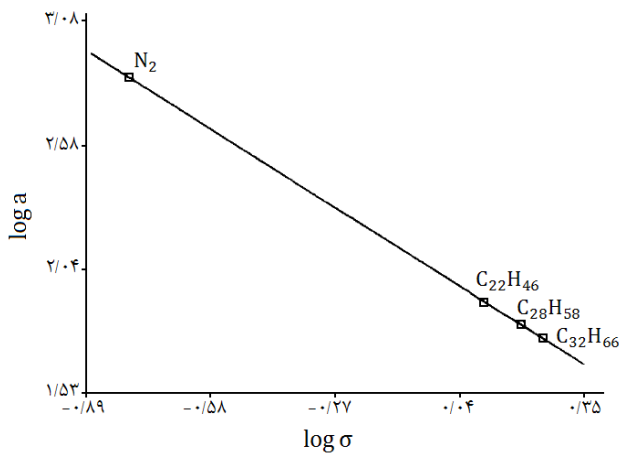
با توجه به توضیحات ذکر شده در ارتباط با ضریب تقسیم کننده و تشابه می‌دانیم که مساحت این موزائیک‌ها با مربع ضریب تقسیم کننده رابطه دارد (رابطه ۱۰).

$$s^2 \text{ سطح موزائیک (یک)} \quad (10)$$



شکل ۱۰- پوشش دادن سطح یک سطح فرکتالی غیرایده‌ال با طول متفاوت برای اندازه‌گیری بعد فرکتال آن.

نیتروژن بر روی سطح گرافیت بعد فرکتال سطح گرافیت را برابر با $2/07 \pm 0/001$ اندازه گیری نمودند (جدول ۲ و شکل ۱۲). مشاهده می شود که گرافیت به علت ساختار لایه ای و سطحی بسیار هموار، بعد فرکتال بسیار نزدیک به ۲ (بعد اقلیدسی) دارد. در صورتی که سطوح با ناهمواری بیشتر و پیچیده تر دارای بعد فرکتال نزدیک به ۳ خواهند بود.



شکل ۱۲- تعیین بعد فرکتال سطح گرافیت با استفاده از جذب مولکولی [۲۲].

¹ Avnir

در جدول ۱ برای چند مقدار مختلف بعد فرکتال و $\frac{\sigma}{A_0}$ ضریب ناهمواری محاسبه شده است [۱۷].

۲- روش های به دست آوردن بعد فرکتال زیر آیندهای قابل استفاده در صنایع پوشش سطوح

۲-۱- روش جذب سطحی مولکول (روش غیرمستقیم)

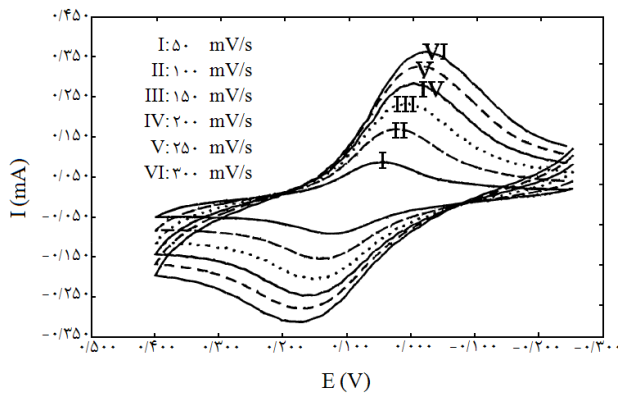
جذب لایه ای به ضخامت یک مولکول بر روی سطح جسم فرکتالی یکی از اولین روش های اندازه گیری بعد فرکتال بوده است [۲۲-۱۸]. در این روش یک سری از مولکول ها با ابعاد مولکولی متفاوت - مشابه استفاده از موزائیک هایی با ابعاد مختلف- به صورت مجزا جذب سطح مورد نظر می شوند. توجه شود که مولکول های انتخابی و شرایط جذب سطحی باید به گونه ای باشد که تنها یک لایه از مولکول ها تمام سطح را پوشش دهند. سپس با محاسبه تعداد مولکول های جذب شده - مشابه با تعداد موزائیک ها- بر روی سطح، و سطح مقطع هر مولکول و رسم نمودار $\log a$ بر حسب $\log \frac{1}{\sigma}$ ، و محاسبه شیب خط حاصل از این داده ها، بعد فرکتال سطح قابل محاسبه خواهد بود. بدیهی است که مولکول های با ابعاد بزرگتر کمتر می توانند به منافذ کوچکتر نفوذ نمایند و سطح محاسبه شده توسط آنها کمتر از سطح محاسبه شده توسط مولکول های کوچک خواهد بود. مثالی از این روش محاسبه بعد فرکتال بر اساس کار تحقیقاتی اونیر^۱ و همکارانش می باشد [۲۲، ۲۱]. آنها با جذب تک لایه- ای از مولکول های هیدروکربن های سنگین با ابعاد مولکولی متفاوت و

جدول ۱- ضریب ناهمواری برای مقادیر مختلف بعد فرکتال و $\frac{\sigma}{A_0}$ [۱۷].

ضریب ناهمواری سطح برای مقادیر مختلف $\frac{\sigma}{A_0}$				بعد فرکتال
$\frac{\sigma}{A_0} = 10^{-18}$	$\frac{\sigma}{A_0} = 10^{-12}$	$\frac{\sigma}{A_0} = 10^{-8}$	$\frac{\sigma}{A_0} = 10^{-4}$	
۱	۱	۱	۱	۲
۷/۹	۴	۲/۵	۱/۶	۲/۱
۳۲۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰	۱۰	۲/۵
۱۶۰۰۰۰۰	۶۳۰۰۰	۱۶۰۰	۴۰	۲/۸

جدول ۲- سطح مقطع و تعداد مولکول های جذب شده بر روی سطح گرافیت [۲۲].

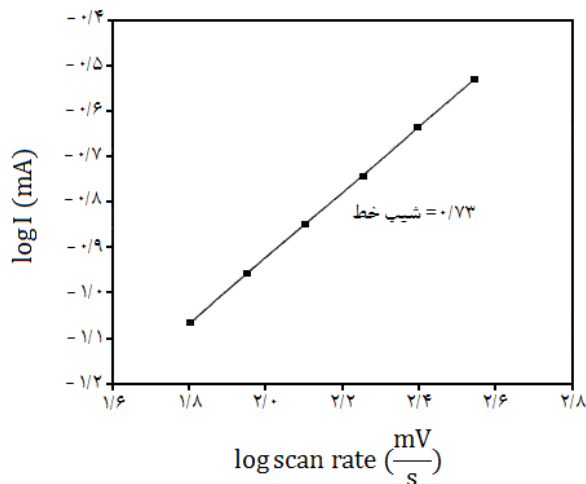
a ($\mu \text{ mol/g}$)	σ (nm^2)	مولکول جذب شونده
۸۲/۳	۱/۲۶	C ₂₂ H ₄₆
۶۶/۴	۱/۵۷	C ₂₈ H ₅₈
۵۸/۴	۱/۷۸	C ₃₂ H ₆₆
۶۹۷	۰/۱۶۲	N ₂



شکل ۱۴- نمودار جریان بر حسب پتانسیل در سرعت‌های اسکن مختلف، به‌دست آمده از آزمون ولتامتری حلقوی چرخه‌ای [۲۳].

بر اساس کار تحقیقاتی استروم^۴ و همکارانش اثبات می‌شود که در صورتی که نمودار لگاریتمی جریان بر حسب لگاریتم سرعت اسکن ولتاژ، در قله کاتدی^۵ حاصل از آزمون ولتامتری رسم شود (شکل ۱۵) شیب خط حاصل مطابق رابطه ۱۴ تابعیت خطی با بعد فرکتال خواهد داشت [۲۴، ۲۵].

$$\text{slope} = \frac{D-1}{2} \quad (14)$$



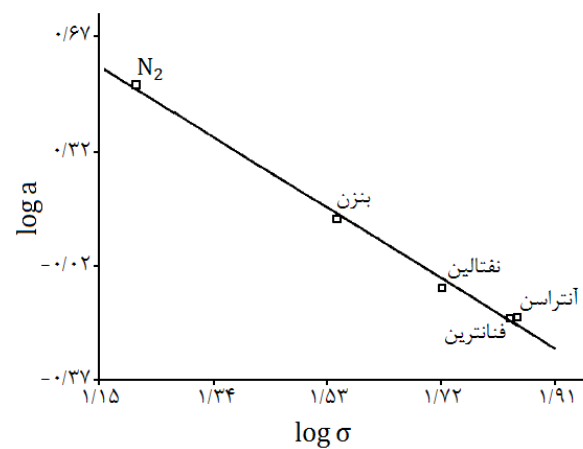
شکل ۱۵- نمودار لگاریتمی جریان بر حسب سرعت اسکن ولتاژ، در قله کاتدی حاصل از آزمون ولتامتری [۲۳].

رنجبر و رستگار در کار تحقیقاتی خود که بر روی کامپوزیت‌های عایق-هادی حاوی تجمعات هادی الکتريسته از کربن بلک در بستر رزین اپوکسی کار می‌کردند روشی جدید برای محاسبه بعد فرکتال تجمعات کربن بلک در رزین اپوکسی ابداع نمودند [۲۶]. ابعاد تجمعات و نحوه اتصال آنها به هم عامل تعیین‌کننده میزان هدایت الکتریکی این نوع

اونیر همچنين توانست بعد فرکتال سطح کربن بلک^۱ را به همين ترتيب با استفاده از جذب ترکیبات آروماتیک پلی سیلیک و نیتروژن برابر با $2/25 \pm 0/09$ به‌دست آورد (جدول ۳ و شکل ۱۳). همانطور که انتظار می‌رود، کربن بلک به‌دلیل داشتن سطحی ناهموارتر از گرافیت، بعد فرکتالی بیشتر دارد. بیشتر شدن مقدار بعد فرکتال کربن بلک از ۲ نشان‌دهنده الگوهای پیچیده‌تر سطح این ماده نسبت به گرافیت است.

جدول ۳- سطح مقطع و تعداد مولکول‌های جذب شده بر روی سطح کربن بلک [۲۲].

مولکول جذب‌شونده	σ (Å ²)	a (mmol/g)
بنزن	۳۵/۲	۱/۳۰
نفتالین	۵۹/۲	۰/۸۰
آنتراسن	۷۰/۷	۰/۶۵
فنانتین	۶۸/۸	۰/۶۵
N ₂	۱۶/۲	۳/۳۳



شکل ۱۳- تعیین بعد فرکتال سطح کربن بلک با استفاده از جذب مولکولی [۲۲].

۲-۲- روش‌های الکتروشیمیایی (روش غیرمستقیم)

گوبل^۱ و همکارانش [۲۳] در کار تحقیقاتی خود بر روی الکترودیپوزیشن^۲ رزین پلی امینوفنول (به عنوان پلیمری رسانا) در حضور آنیون‌های مختلف در پی یافتن بعد فرکتال پوشش تشکیل شده از این پلیمر بر روی سطح زیرآیند به روش ولتامتری چرخه‌ای بودند. بدین جهت آزمون ولتامتری چرخه‌ای را در سرعت‌های اسکن^۳ مختلف ولتاژ بر روی این پلیمر به عنوان الکتروود کار، در سیستم سه الکتروودی انجام دادند و نمودار جریان بر حسب پتانسیل را رسم کردند (شکل ۱۴).

¹ Gopal

² Electrodeposition

³ Scan rate

⁴ Strommeet al
⁵ Cathodic peak

$$t = \frac{1}{f} \quad (16)$$

$$\text{scanrate} = \frac{2V_{\text{peak}}}{t/2} = 4V_{\text{peak}}f \quad (17)$$

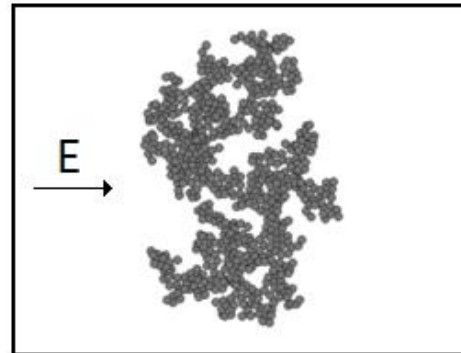
بنابراین اگر شیب منحنی لگاریتم جریان برحسب لگاریتم سرعت اسکن ولتاژ به دست آورده شود مشابه آن است که شیب منحنی (سطح کلی) $\log A$ بر حسب $\log \sigma$ محاسبه شود که از آن می‌توان بعد فرکتال را با استفاده از نظریه استروم به دست آورد (شکل ۱۹).

۲-۳- روش پردازش تصویر (روش مستقیم)

روش پردازش بر روی تصاویر مختلف به دست آمده از اجسام فرکتالی متداول‌ترین و اصلی‌ترین روش برای به دست آوردن بعد فرکتال می‌باشد. محققین در حوزه‌های مختلف علم با بهره‌گیری از این روش، بعد فرکتال را برای پدیده‌های فرکتالی مختلف محاسبه نموده‌اند که به چند مورد از آنها اشاره می‌شود. تنگ^۲ و همکارانش که علاقمند به مطالعه شکل خلل و فرج‌ها، نحوه اتصال و توزیع آنها در سطوح فلزات، الیاف فلزی و پودر فلزات قالب‌گیری شده بودند در کار تحقیقاتی خود قطعاتی از پودر فولاد زنگ‌نزن با اشکال نامنظم با اندازه ذرات ۱۵۰-۳۰ میکرون تهیه کردند. برای تهیه این قطعات ابتدا تحت فشار ذرات فلزی را قالب‌گیری کرده و سپس به مدت ۲ ساعت در دمای ۱۲۵۰°C حرارت دادند. از قطعات تهیه شده عکس میکروسکوپ نوری تهیه شد [۲۷]. سپس طبق مراحل زیر بعد فرکتال مرز مشترک حفرات و ذره‌های فلزی محاسبه گردید:

- ۱- تصویر میکروسکوپ نوری با استفاده از تعیین آستانه^۴ بین روشنایی نقاط تیره و روشن که بیانگر روشنایی حفرات و ذرات فلزی است به تصویر سیاه سفید تبدیل می‌شود.
- ۲- تصویر تقسیم‌بندی شده و تعداد مربع‌های لازم برای پوشش دادن مرز قسمت سفید و سیاه محاسبه می‌شود. در هر مرحله اندازه مربع‌ها کوچکتر شده و تعداد مربع‌های لازم برای پوشش دادن مرز محاسبه می‌شود (شکل ۲۰).

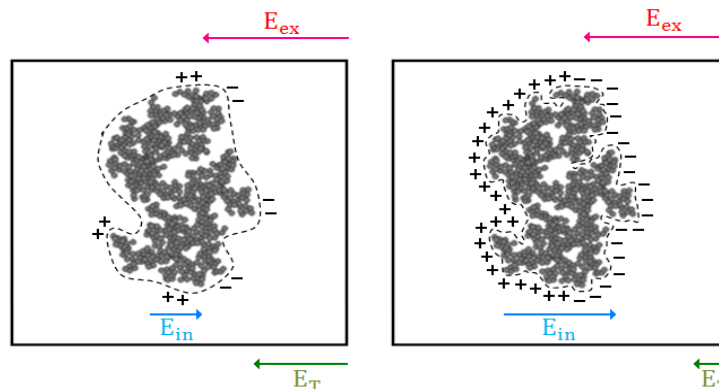
کامپوزیت‌ها می‌باشد و بدین جهت است که تعیین بعد فرکتال تجمعات کربن بلک اهمیت ویژه‌ای در این کامپوزیت‌ها دارد. یک ذره از تجمعات کربن بلک را در بستر اپوکسی تحت یک میدان الکتریکی خارجی در نظر بگیرید (شکل ۱۶).



شکل ۱۶- شمایی از تجمع کربن بلک در رزین اپوکسی، E نشان‌دهنده میدان الکتریکی اعمالی است [۲۶].

اعمال میدان الکتریکی بر این کامپوزیت باعث می‌شود که در سطح مشترک کربن بلک و رزین (عایق) بار الکتریکی القا شود. میزان تاثیر میدان الکتریکی اعمالی از شارژ ایجاد شده بر روی سطح مشترک وابسته است به فرکانس تغییر جهت میدان چرا که با توجه به شکل ۱۷ در فرکانس‌های بالا، میدان الکتریکی اعمالی تنها لبه‌های نوک تیز تجمعات را احساس می‌کند و فرصت برخورد با حفرات عمیق را ندارد. به عبارتی سطحی که میدان الکتریکی اندازه‌گیری می‌کند مقدار کمی است. در فرکانس‌های پایین میدان الکتریکی اعمالی توانایی نفوذ به حفرات عمیق در میان تجمعات را دارد و سطح بیشتری از آنها را تحت تاثیر قرار می‌دهد. به عبارتی سطحی که میدان الکتریکی اندازه‌گیری می‌کند مقدار بیشتری است. آنها با بهره‌گیری از این نظریه و مشابه‌سازی عوامل موثر در آزمون امپدانس الکتروشیمیایی^۱ (روابط ۱۵-۱۷) با آزمون ولتاژتری چرخه‌ای (شکل ۱۸) نمودار مشابهی به دست آوردند تا بتوانند از نظریه استروم استفاده نمایند.

$$V = V_{\text{peak}} \sin(\omega t) \quad (15)$$



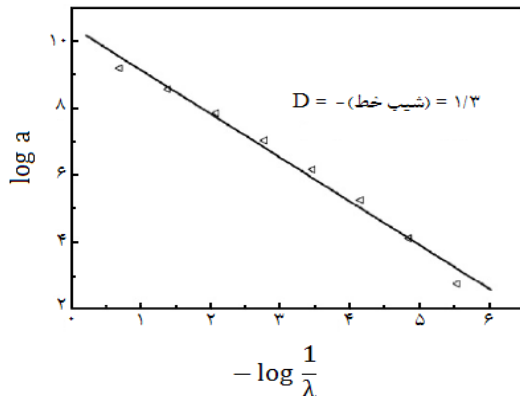
شکل ۱۷- نحوه نفوذ میدان الکتریکی به حفرات تجمع و نحوه تاثیرپذیری میدان کلی (E_T) از میدان خارجی (E_{ex}) و داخلی (E_{in}) در فرکانس‌های متفاوت.

¹ Carbon black

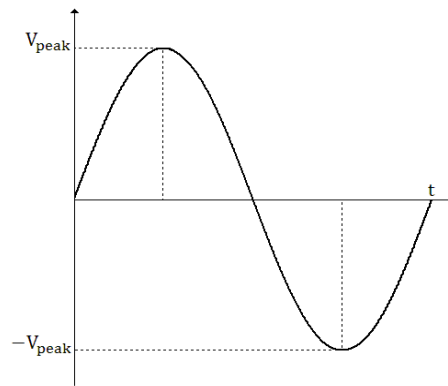
² Electrochemical impedance spectroscopy

³ Tang

⁴ Thresholding



شکل ۲۱- بعد فرکتال مرز مشترک حفرات و ذرات فلزی به صورت شیب بهترین خط برازش شده بین $\log a$ و $\log(1/\lambda)$ [۲۷].

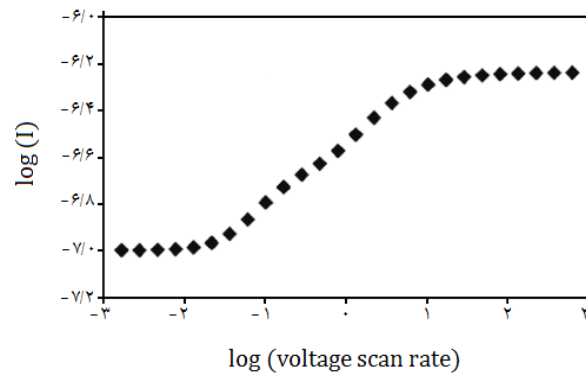


شکل ۱۸- نحوه مشابه سازی پارامترهای آزمون امپدانس الکتروشیمیایی با آزمون ولتاژتری چرخه‌ای.

از طرفی طبق رابطه ۱۸ می‌دانیم:

$$D_{\text{surface}} = D_{\text{curve}} + 1 \quad (18)$$

هیروس و آمادا^۱ بر روی قدرت چسبندگی پوشش‌های سرامیکی بر روی زمینه‌های فلزی تحقیق می‌نمودند و در پی یافتن رابطه ناهمواری سطح و قدرت چسبندگی پوشش سرامیکی بر روی آن بودند. بدین منظور زمینه‌ای از جنس فولاد را با استفاده از زبره پاشی^۲ در زاویه‌های مختلف ناهموار نمودند. تصویر میکروسکوپ الکترونی روبشی^۳ سطح مقطع سطوح ناهموار شده با سه زاویه متفاوت زبره پاشی به صورت شکل ۲۲ به دست آمد [۲۸].



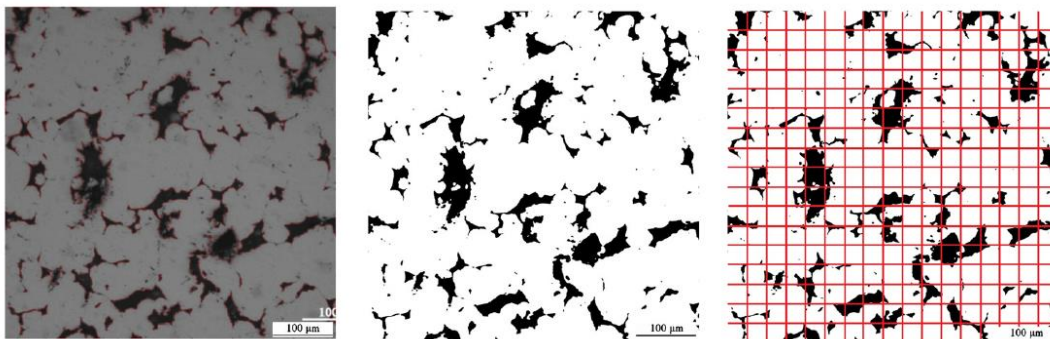
شکل ۱۹- منحنی لگاریتم جریان برحسب لگاریتم سرعت اسکن ولتاژ برای کامپوزیت عایق- هادی حاوی ۲ درصد کربن بلک، بعد فرکتال برابر ۲/۶۰ [۲۶].

¹ Hirose and Amada

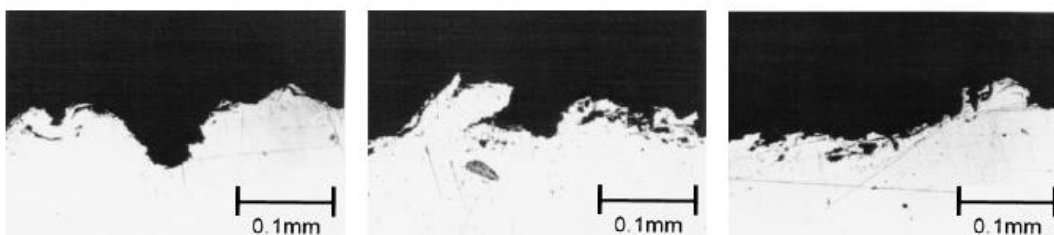
² Blasting

³ Scanning electron microscope (SEM)

با رسم $\log a$ برحسب $-\log(1/\lambda)$ بعد فرکتال مرز مشترک حفرات و ذرات فلزی محاسبه گردید (شکل ۲۱).

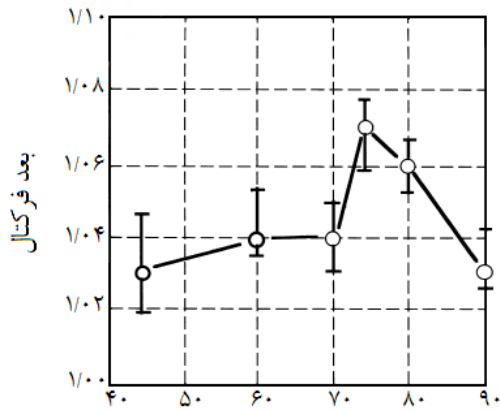


شکل ۲۰- نحوه پردازش تصویر میکروسکوپ نوری قطعات فولادی [۲۷].



شکل ۲۲- تصویر میکروسکوپ الکترونی روبشی سطح مقطع سطوح ناهموار شده با سه زاویه زبره پاشی ۷۵، ۹۰ و ۶۰ درجه به ترتیب از چپ به راست [۲۸].

(شکل ۲۵). ایشان اعلام داشتند که نتایج حاصل از بعد فرکتال سطح هم خوانی بالاتری از نتایج حاصل از ناهمواری میانگین سطح با قدرت چسبندگی دارند.



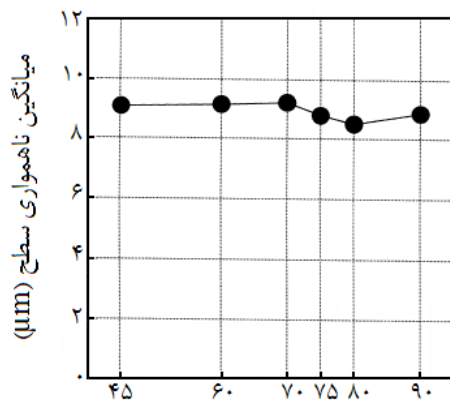
زاویه بلاستینگ (درجه)

شکل ۲۵- نمودار بعد فرکتال سطح مقطع زمینه فلزی ناهموار شده بر حسب زاویه پاشش [۲۸].

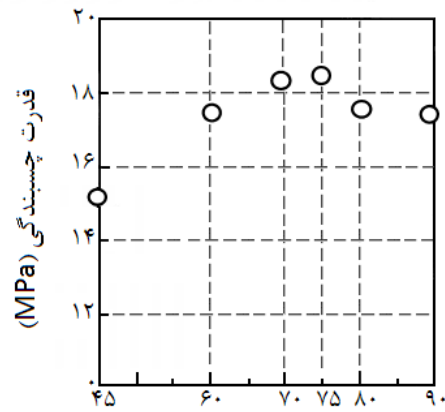
با استفاده از پروفایلمتر میانگین ناهمواری سطح بر حسب زاویه زبره پاشی به صورت شکل ۲۳ رسم گردید و تفاوت چندانی بین زوایای مختلف دیده نشد. سپس پوشش آلومینا به روش اسپری پلاسما به ضخامت ۲۰۰-۳۰۰ میکرون بر روی سطح مدنظر اعمال گردید و قدرت چسبندگی آنها توسط نیروی لازم برای جدا کردن پوششها اندازه گیری شد. بیشترین قدرت چسبندگی در زاویه ۷۵ درجه به دست آمد. سپس تصاویر به دست آمده از سطح مقطع نمونه‌ها برای به دست آوردن بعد فرکتال آنها مورد استفاده قرار گرفت. ابتدا تصاویر به دست آمده تبدیل به تصویر دو رنگ^۱ می‌شود. سپس خط مرزی پروفایل سطح جدا شده و شکل حاصل تقسیم بندی می‌شود. تعداد مربع‌های لازم برای پوشش دادن خط مرزی پروفایل محاسبه و در هر مرحله اندازه مربع‌ها کوچکتر شده و تعداد مربع‌های لازم برای پوشش دادن مرز مجدد محاسبه می‌شود (شکل ۲۴). با رسم نمودار loga در مقابل $-\log \frac{1}{\lambda}$ بعد فرکتال خط مرزی به دست می‌آید.

مشاهده شد که بیشترین بعد فرکتال مربوط به زاویه ۷۵ درجه برای زبره پاشی است، جایی که بیشترین قدرت چسبندگی مشاهده شده است

^۱ Binary

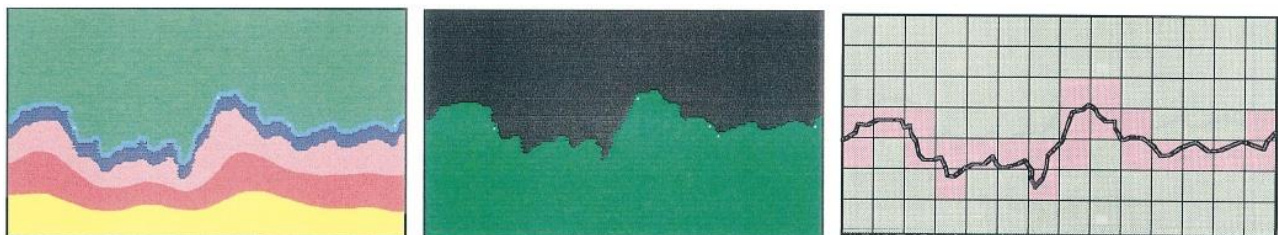


زاویه بلاستینگ (درجه)



زاویه بلاستینگ (درجه)

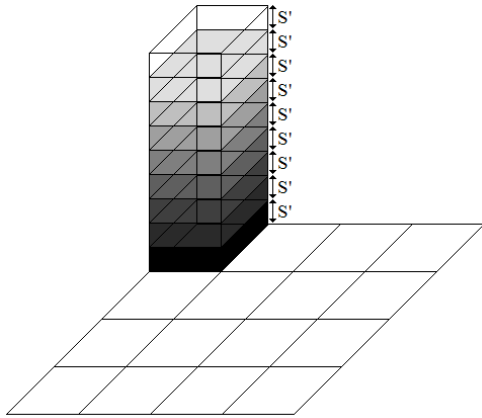
شکل ۲۳- نمودارهای ناهمواری میانگین سطح و قدرت چسبندگی بر حسب زاویه پاشش [۲۸].



شکل ۲۴- مراحل به دست آوردن بعد فرکتال با استفاده از پردازش تصویر سطح مقطع [۲۸].

هر قسمت $S \times S$ از تصویر را به صورت ستونی از جعبه‌های روی هم قرار گرفته‌ی $S \times S \times S'$ می‌توان در نظر گرفت که S' از رابطه ۱۹ به دست می‌آید (شکل ۲۷):

$$\left[\frac{M}{S} \right] = \left[\frac{G'}{S} \right] \quad (19)$$



شکل ۲۷- در نظر گرفتن هر قسمت $S \times S$ از تصویر به صورت ستونی از جعبه‌های روی هم قرار گرفته $S \times S \times S'$

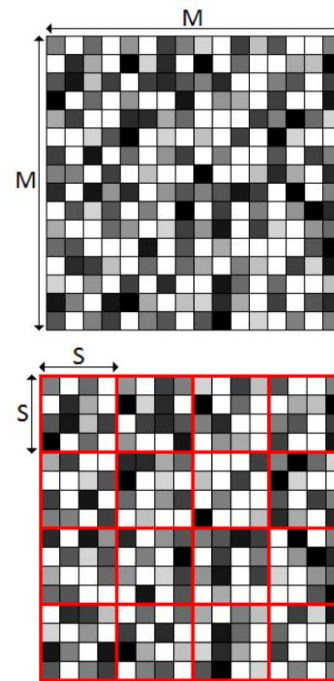
- اگر کمترین سطح روشنایی قسمت $S \times S$ z نام در جعبه k ام قرار بگیرد آنگاه n_r سهم و بیشترین سطح روشنایی آن در جعبه k ام قرار بگیرد آنگاه n_r سهم قسمت $S \times S$ z نام در N_r (مجموع اختلاف روشنایی تمام قسمت‌های $S \times S$)، به صورت روابط ۲۰ و ۲۱ محاسبه می‌گردد (شکل ۲۸):

$$n_r = k - 1 + 1 \quad (20)$$

$$\rightarrow N_r = \sum_{i,j} n_r(i, j) \quad (21)$$

بیسواس^۱ و همکارانش [۲۹] روشی را برای بهبود الگوریتم شمارش جعبه تفاضلی^۲ در محاسبه بعد فرکتال توسط سرکار و چاندیوری^۳ [۳۰, ۳۱] ارائه شده بود، پیشنهاد دادند. در روش ارائه شده، بعد فرکتال مستقیماً از تصویر خاکستری^۴ محاسبه می‌گردد. مقدار عددی بعد فرکتال حاصل از این روش به علت اینکه با به‌کارگیری سطح روشنایی تصویر خاکستری محاسبه می‌گردد، عددی بین ۲ تا ۳ خواهد بود، که به همین علت به این روش، محاسبه بعد فرکتال سه بعدی نیز گفته می‌شود. مراحل محاسبه به شرح زیر است:

- تصویر $M \times M$ پیکسل موجود مطابق شکل ۲۶ به قسمت‌های کوچک‌تر $S \times S$ تقسیم می‌شود بطوری که $i = S/M$ ($2 \leq S \leq \frac{M}{2}$).



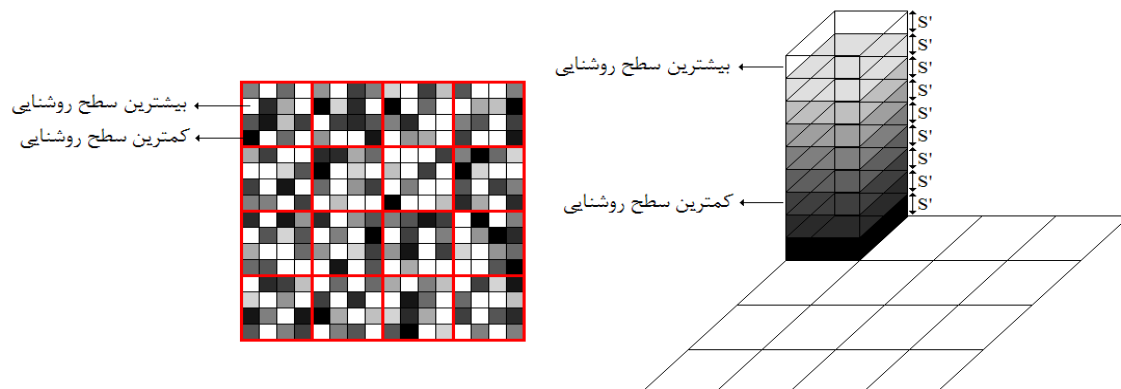
شکل ۲۶- تقسیم‌بندی تصویر خاکستری $M \times M$ به قسمت‌های کوچک‌تر $S \times S$

¹ Biswas

² Differential box counting

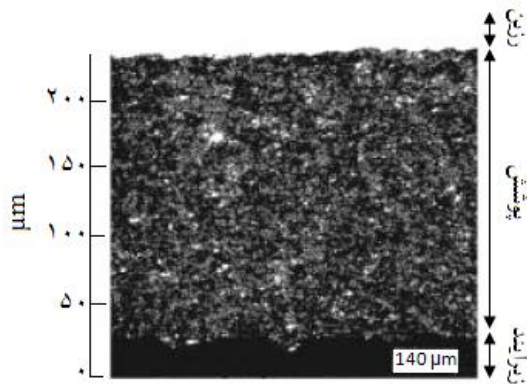
³ Sarkar and Chaundhuri

⁴ Intensity image

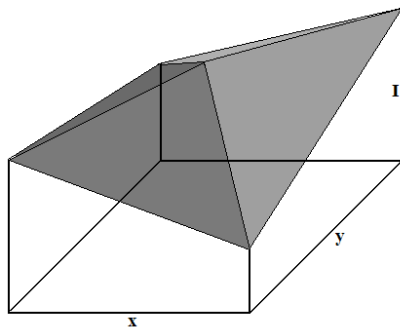


شکل ۲۸- نحوه محاسبه n_r در هر قسمت $S \times S$ از تصویر.

نقطه میانگین وصل کرده و چهار سطح جدید بدست می‌آید. مجموع این چهار سطح، سطح فرکتال جعبه نامیده می‌شود (شکل ۳۱).



شکل ۳۰- تصویر میکروسکوپ لیزر هم کانون روبشی از تمام ضخامت فیلم پوشش [۳۲].



شکل ۳۱- نحوه محاسبه سطح فرکتال جعبه.

با تغییر اندازه r $N(r)$ تغییر خواهد کرد (شکل ۳۲). با رسم $\log N(r)$ در مقابل $\log \frac{1}{r}$ و محاسبه شیب خط حاصل و اضافه کردن بعد اقلیدسی^۶ به آن بعد فرکتال ترکها و حفرات موجود در پوشش برای سه بعد به دست می‌آید.

^۱ Llorca-Isern
^۲ Thermal spray
^۳ Porosity
^۴ Micro/macrocraack
^۵ Confocal scanning laser microscope (CSLM)
^۶ Euclidean dimension

در این صورت بعد فرکتال سطح تصویر به صورت رابطه ۲۲ تعریف می‌شود.

$$D_{\text{surface}} = \frac{\log N_r}{\log \frac{1}{r}} \quad (22)$$

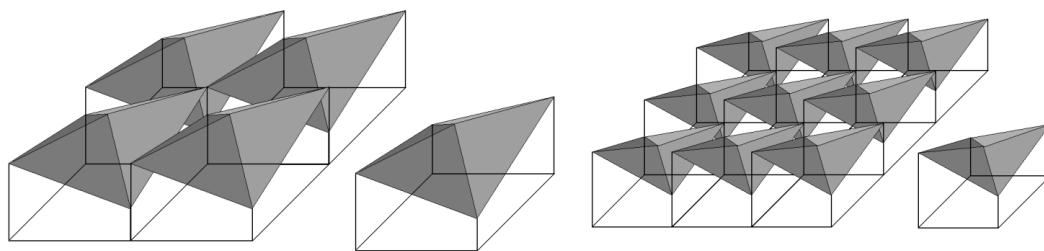
با تغییر اندازه S در هر مرحله و محاسبه N_r و رسم خط $\log N_r$ بر حسب $\log 1/r$ بعد فرکتال سطح تصویر به صورت شیب خط حاصل به دست خواهد آمد. در کار تحقیقاتی لورکا-ایسرن^۱ و همکارانش [۳۲] بر روی عیوب پوشش‌های سرامیکی و فلزی اعمال شده به روش پاشش حرارتی^۲، نظیر تخلخل^۳ و ترک‌های بزرگ و میکرونی^۴ دریافت شد که نحوه اتصال این حفرات و ترکها به یکدیگر عامل مهمی در تعیین کیفیت پوشش محسوب می‌گردد. آنها برای مطالعه توزیع و نحوه اتصال این عیوب در پوشش‌های اعمال شده به روش اسپری حرارتی، بعد فرکتال را ابزاری مناسب معرفی نمودند. در این پژوهش برای محاسبه بعد فرکتال سطح مشترک حفرات و پوشش، ابتدا با استفاده از رزین اپوکسی رقیق (با قدرت نفوذ بالا) که حاوی مواد فلورسنتی است ترکها و حفرات موجود در پوشش کاملاً پر می‌شود. بدیهی است که هر چه این ترکها اتصال بیشتری باهم داشته باشند میزان رزین بیشتری به فیلم پوشش نفوذ خواهد کرد (شکل ۲۹).



شکل ۲۹- نحوه نفوذ رزین اپوکسی حاوی مواد فلورسنتی به داخل حفرات و ترکها.

سپس توسط میکروسکوپ لیزر هم کانون روبشی^۵ از نمونه‌ها تصویر میکروسکوپی (از تمام ضخامت فیلم پوشش) تهیه می‌شود (شکل ۳۰). مناطق روشن بیانگر شدت بالای فلورسنت یعنی وجود ترکها و حفرات را نشان می‌دهند. برای محاسبه بعد فرکتال ترکها و حفرات موجود در پوشش نیز از روش شمارش جعبه (رابطه ۲۲) استفاده شد. $N(r)$ را می‌توان از هر ویژگی از تصویر که با تغییر ابعاد جعبه تغییر می‌کند به دست آورد. در این روش $N(r)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

- یک r_1 انتخاب می‌شود و شدت فلورسنت هر چهار گوشه جعبه بر روی یک نمودار (شدت فلورسنت) $xy-I$ رسم می‌شود. میانگین این چهار شدت فلورسنت در وسط جعبه رسم می‌شود. سپس هر چهار گوشه را به



شکل ۳۲- چگونگی تغییر $N(r)$ با تغییر اندازه r .

۳- نتیجه گیری

چسبندگی یک پوشش به سطح زیرآیند تابعیت هم‌خوان تری از بعد فرکتال نسبت به ناهمواری میانگین سطح دارد. روش‌های گوناگون مستقیم و غیرمستقیم محاسبه بعد فرکتال سطوح امکان محاسبه هر چه دقیق‌تر این کمیت بسیار مهم و کارآمد در حوزه‌های مختلف علوم را فراهم کرده است.

ناهمواری سطح عاملی تعیین کننده در چسبندگی پوشش‌ها به زیرآیند می‌باشد. در سطوح با ناهمواری‌های پیچیده استفاده از روش‌های متداول اندازه‌گیری ناهمواری سطح و هندسه اقلیدسی ناکارآمد به نظر می‌رسد. استفاده از هندسه فرکتالی و بعد فرکتال امکان بررسی ناهمواری در سطوح پیچیده را فراهم کرده است. بررسی‌ها نشان داده است که

۴- مراجع

1. D. E. Packham, "Handbook of adhesion (D. E. Packham, Adhesion – fundamental and practical)", Sec. ed, UK, John Wiley & Sons, 16-18, **2005**.
2. D. E. Packham, "Handbook of adhesion (K. W. Allen, Theories of adhesion)", Sec. Ed, UK, John Wiley & Sons, 353-537, **2005**.
3. R. J. Good, "Theory of Cohesive vs Adhesive separation in an adhering system", J. Adhes., 4, 133-154, **1972**.
4. A. W. Adamson, A. P. Gast, "Physical chemistry of surface", 6thed, USA, John Wiley & Sons, **1997**.
5. A. Pizzi, K. L. Mittal, "Handbook of adhesive technology revised and expanded (D. E. Packham, The mechanical theory of adhesion)", Sec. Ed, USA, CRC Press, **2003**.
6. G. A. Somorjai, "Principles of surface chemistry (fundamental topics in physical chemistry)", First Ed, USA, Prentice Hall, **1972**.
7. D. E. Packham, "Some contributions of surface analysis to the development of adhesion theories", J. Adhes., 84, 240-255, **2008**.
8. R. N. Wenzel, "Resistance of solid surface to wetting by water", Ind. Eng. Chem., 28, 988-994, **1936**.
9. D. E. Packham, "Surface energy, surface topography and adhesion", Int. J. Adhes. Adhes., 23, 437-448, **2003**.
10. P. Meakin, "The growth of rough surfaces and interfaces", Physics reports, 235, 189-289, **1993**.
11. B. Bhushan, N. J. Israelachvili, U. Landman, "Nanotribology: friction, wear and lubrication at the atomic scale", Nature, 374, 607-616, **1995**.
12. B. B. Mandelbrot, "The fractal theory of nature", USA, Freeman, **1982**.
13. E. Charkaluk, M. Bigerelle, A. Iost, "Fractals and fracture", Eng. Fract. Mech., 61, 119-139, **1998**.
14. D. E. Packham, "Handbook of adhesion (D. E. Packham, Fractals)", Sec. Ed, UK, John Wiley & Sons, 197-199, **2005**.
15. K. Falconer, "Fractal geometry: mathematical foundations and applications", Sec. Ed, USA, John Wiley & Sons, **2003**.
16. D. E. Packham, "Handbook of adhesion (D. E. Packham, Fractals and fractal dimension)", Sec. ed, UK, John Wiley & Sons, 200-202, **2005**.
17. D. E. Packham, "Handbook of adhesion (D. E. Packham, Fractals and surface roughness)", Sec. Ed, UK, John Wiley & Sons, 203-205, **2005**.
18. D. Farin, D. Avnir, "The fractal approach to heterogeneous chemistry: surfaces, colloids, polymers", First Ed, USA, John Wiley & Sons, **1989**.
19. A. Harison, "Fractals in chemistry", First Ed, UK, Oxford University Press, **1995**.
20. D. Avnir, D. Frain, P. Pfeifer, "Molecular fractal surface", Nature, 308, 261-263, **1984**.
21. P. Pfeifer, D. Avnir, "Chemistry in noninteger dimensions between two and three. I: Fractal theory of heterogeneous surfaces", J. Chem. Phys., 79, 3558-3565, **1983**.
22. D. Avnir, D. Frain, P. Pfeifer, "Chemistry in noninteger dimensions between two and three. II: Fractal surfaces of adsorbents", J. Chem. Phys., 79, 3566-3571, **1983**.
23. F. Gobal, K. Malek, M.G. Mahjani, M. Jafarian, V. Safarnavadeh, "A study of the fractal dimensions of the electrodeposited poly-ortho-aminophenol films in presence of different anions", Synth. Met., 108, 15-19, **2000**.
24. M. Stromme, G. A. Niklasson, C. G. Granqvist, "Voltammetry on fractals", Solid State Commun, 96, 151-154, **1995**.
25. M. Stromme, G. A. Niklasson, C. G. Granqvist, "Determination of fractal dimension by cyclic I-V studies: The Laplace-transform method", Physical Review B, 52, 14192-14197, **1995**.
26. Z. Ranjbar, S. Rastegar, "Two- and three-dimensional fractal dimensions of electro-deposited carbon-black-epoxy composite films", Anal. Lett, 43, 197-208, **2009**.
27. H. P. Tang, J. Z. wang, J. L. zhu, Q. B. Ao, J. Y. wang, B. J. Yang, Y. N. Li, "Fractal dimension of pore-structure of porous metal materials made by stainless steel powder", Powder technol., 217, 383-387, **2012**.
28. S. Amada, T. Hirose, "Influence of grit blasting per-treatment on the adhesion strength of plasma sprayed coatings: fractal analysis of roughness", Surf. Coat. Technol., 102, 132-137, **1998**.
29. M. K. Biswas, T. Ghose, S. Guha, P. K. Biswas, "Fractal dimension estimation for texture images: A parallel approach", Pattern recognit. Letters, 19, 309-313, **1998**.
30. N. Sarkar, B. B. Chaudhuri, "An efficient approach to estimate fractal dimension of textural images", Pattern Recognit., 25, 1035-1041, **1992**.
31. N. Sarkar, B. B. Chaudhuri, "An efficient differential box counting approach to compute fractal dimension of images", IEEE Trans. Systems Man Cybernet, 24, 115-120, **1994**.
32. N. Llorca-Isern, G. Bertran Vidal, J. Jorba, L. Bianchi, D. Sánchez, "Estimation of three-dimensional connectivity of internal defects in coatings using fractal analysis", J. Therm. spray technol., 10, 287-292, **2000**.